1.12.4　交換子の計算に有用な規則

ここで $\hat{F}$, $\hat{G}$, $\hat{H}$ を一般の演算子とする。これには，次に示す演算規則が成り立つ。とくに，(1.76) 式を**Jacobi**（ヤコビ）**恒等式**（こうとうしき）という。

$$[\hat{F}, \hat{G} + \hat{H}] = [\hat{F}, \hat{G}] + [\hat{F}, \hat{H}] \tag{1.72}$$

$$[\hat{F} + \hat{G}, \hat{H}] = [\hat{F}, \hat{H}] + [\hat{G}, \hat{H}] \tag{1.73}$$

$$[\hat{F}\hat{G}, \hat{H}] = \hat{F}[\hat{G}, \hat{H}] + [\hat{F}, \hat{H}]\hat{G} \tag{1.74}$$

$$[\hat{F}^2, \hat{H}] = \hat{F}[\hat{F}, \hat{H}] + [\hat{F}, \hat{H}]\hat{F} \tag{1.75}$$

$$[\hat{F}, [\hat{G}, \hat{H}]] + [\hat{G}, [\hat{H}, \hat{F}]] + [\hat{H}, [\hat{F}, \hat{G}]] = 0 \tag{1.76}$$

$$[\hat{F}, a\hat{G}] = a[\hat{F}, \hat{G}] \tag{1.77}$$

(1.72) 式と (1.73) 式は素直に左辺を展開すれば自然と右辺が導かれる。

(1.74) 式と (1.75) 式は右辺を展開すれば自然と左辺が導かれる（右辺を展開して得られる 4 つの項のうち，2 番目と 3 番目の項がキャンセルする）。

(1.76) 式は (1.74) 式を用いれば導かれる。

(1.77) 式はほぼ自明である。

9.11.3　角運動量の z 成分の固有値

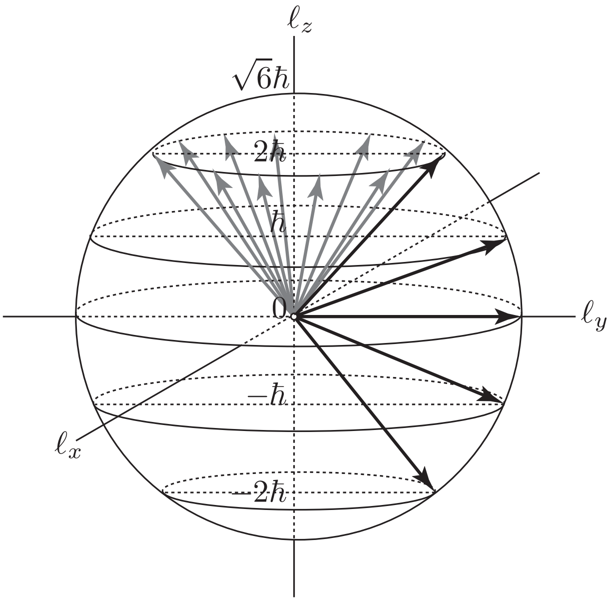

図 9.17　$\ell = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ の場合について角運動量を黒色のベクトルで表示した。$\hat{\boldsymbol{\ell}}^2$ と $\hat{\ell}_z$ は可換だから，ℓ_z も同時に確定する。一方，$\hat{\ell}_z$ と $\hat{\ell}_x$，$\hat{\ell}_y$ は可換でないから ℓ_x と ℓ_y は確定値をとらず，不定となる。$\ell_z = 2\hbar$ の場合に ℓ_x と ℓ_y が不定になるようすを灰色のベクトルで示した。